МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Череповецкий государственный университет»

**Лабораторная работа № 4**

**Моделирование с использование аппарата СМО для решения задачи оптимального использования ресурсов**

**Выполнил:**

студент гр. 1ИВТпб-01-31оп

Климов А.Г.  
**Проверил:** преподаватель

Юдина О.В.  
Отметка о зачете:

Череповец

2018 год

***Моделирование с использование аппарата СМО для решения задачи оптимального использования ресурсов***

**Расчет характеристик СМО с отказами**

***1. Цель работы:*** научиться выявлять и рассчитывать характеристики одноканальных и многоканальных систем массового обслуживания с отказами.

***2. Задание:***

2.1. Задача 1.(одноканальная система с отказами).

Известно, что заявки на телефонные переговоры в телевизионном ателье поступают с интенсивностью λ заявок в час, а средняя продолжительность разговора по телефону t об мин. Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

2.2. Задача 2. (многоканальная система с отказами).

Определить оптимальное число телефонных номеров в телевизионном ателье для условий задачи1, если оптимальным считать удовлетворение в среднем из каждых 100 заявок не менее N заявок на переговоры.

Необходимые для расчетов величины λ, tоб , N взять по варианту, заданному преподавателем, в Приложении в Таблице 2.

***3. Порядок выполнения работы:***

3.1. Размеченный граф состояний одноканальной системы с отказами имеет вид (рис.1):

λ

S0 S1

μ

Рис.1.

СМО S имеет два состояния: S 0 - канал свободен, S 1 - канал занят*.*

В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:

**А** - абсолютную пропускную способность СМО, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

**Q** - относительную пропускную способность, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

**Р отк -** вероятность отказа, т.е. того, что заявка покинет СМО не обслуженной;

**К** - среднее число занятых каналов (для многоканальной системы).

Предельные вероятности состояний равны:

|  |  |
| --- | --- |
| **μ**  **р 0 = -------- ;**  **λ + μ** | **λ**  **р 1 = ------- ;**  **λ + μ** |

которые выражают среднее относительное время пребывания системы в состоянии **S 0 (**когда канал свободен) и **S1 (**когда канал занят).

Абсолютную пропускную способность **A** найдем, умножив относительную пропускную способность **Q** на интенсивность потока отказов:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **μ**  **Q = ------**  *λ + μ* | **λ**  **P отк = ---------**  *λ + μ* | **λ μ**  **А = --------**  *λ + μ* |

Пусть **λ** = 90 (1/ ч), **t**0б = 2 мин.

Пусть **λ** = 80 (1/ ч), **t**0б = 1,5 мин.

Интенсивность потока обслуживаний **μ** =1/**t**0б =1/2 = 0,5(1/мин)=30(1/час).

Интенсивность потока обслуживаний **μ** =1/**t**0б =1/1,5 = 0,6(1/мин)=36(1/час).

Относительная пропускная способность СМО

**Q** = 30 / (90 + 30) = 0,25, т.е. в среднем только 25% поступивших заявок осуществят переговоры по телефону. Соответственно вероятность отказа в обслуживании составит: **Ротк = 0,75.**

**Q** = 36 / (90 + 36) = 0,28, т.е. в среднем только 28% поступивших заявок осуществят переговоры по телефону. Соответственно вероятность отказа в обслуживании составит: **Ротк = 0,72.**

Абсолютная пропускная способность СМО: **А** = 90 \* 0,25 = 22,5 ,

т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки на переговоры. Очевидно, при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

Абсолютная пропускная способность СМО: **А** = 80 \* 0,28 = 22,4 ,

т.е. в среднем в час будут обслужены 22,4 заявки на переговоры. Очевидно, при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

3.2. Размеченный граф состояний многоканальной системы с отказами имеет вид (рис.2):

λ λ λ λ λ λ

S0 S1 S2 … Sk … Sn

μ 2μ 3μ kμ (k+1)μ nμ

Рис.2.

Интенсивность потока заявок (интенсивность нагрузки канала) р0 определим:

ρ2 ρk ρn

p0 = ( 1 + ρ + ---- + ... + ---- + ... + ---- ) - 1

2 ! k ! n !

Интенсивность нагрузки канала **ρ =** 90 /30 = **3** , т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора **tоб = 2** мин поступает в среднем **3** заявки на переговоры.

Интенсивность нагрузки канала **ρ =** 80 /36 = **2,2** , т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора **tоб = 1,5** мин поступает в среднем **2,2** заявки на переговоры.

Будем постепенно увеличивать число каналов (телефонных номеров) **n = 2,3,4,...** и определим для получаемой **n -** канальной СМО характеристики обслуживания.

Относительная пропускная способность - вероятность того, что заявка будет обслужена, определяется:

ρn

Q = 1 - Ротк = 1 - ----- p 0

n!

Абсолютная пропускная способность определяется:

ρn

A = λ \* Q = λ (1 - ---- p0 )

n!

Среднее число занятых каналов можно определить***: ***

Например,

при  **n = 2 p0 =** (1 + 3 + 32 / 2 !)-1 = 0,118 ≈ 0,12 ;

**Q** = 1 - (32 / 2 !) \* 0,118 = 0,471 ≈ 0,47 ;

**A =** 90 \* 0,471 = 42,4 и т.п.

Значения характеристик СМО сведем в таблицу 1.

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Характеристики обслуживания | Обозначение | Число каналов телефонных номеров | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| Относительная  пропускная  способность | Q | 0,25 | 0,47 | 0,65 | 0,79 | 0,90 | 0,95 | |
| Абсолютная  пропускная  способность | A | 22,5 | 42,4 | 58,8 | 71,5 | 80,1 | 85,3 | |

По условию оптимальности Q ≥ 0,9, следовательно, в телевизионном ателье необходимо установить 5 телефонных номеров (в этом случае Q=0,90 - см. таблицу 1) . При этом в час будут обслуживаться в среднем 80 заявок (А = 80,1), а среднее число занятых телефонных номеров (каналов): К= 80,1/30=2,67 .

Например,

при  **n = 2 p0 =** (1 + 2,2 + 2,22 / 2 !)-1 = 0,178 ≈ 0,18 ;

**Q** = 1 - (2,22 / 2 !) \* 0,178 = 0,556 ≈ 0,57;

**A =** 80 \* 0,556 = 44.48 и т.п.

Значения характеристик СМО сведем в таблицу 1.

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Характеристики обслуживания | Обозначение | Число каналов телефонных номеров | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| Относительная  пропускная  способность | Q | 0,31 | 0,57 | 0,757 | 0,88 | 0,95 | 0,98 | |
| Абсолютная  пропускная  способность | A | 24,8 | 44,48 | 60,56 | 70,48 | 76 | 78,56 | |

По условию оптимальности Q ≥ 0,9, следовательно, в телевизионном ателье необходимо установить 5 телефонных номеров (в этом случае Q=0,90 - см. таблицу 1) . При этом в час будут обслуживаться в среднем 80 заявок (А = 80,1), а среднее число занятых телефонных номеров (каналов): К= 80,1/30=2,67 .

***4. Содержание отчета:***

Отчет должен содержать результаты выполнения п.п. 5.1. - 5.3, все расчеты и выводы.

***5. Контрольные вопросы:***

5.1. Назовите простейшие СМО и их параметры.

5.2. Приведите классификацию СМО.

5.3. Что позволяют рассчитать уравнения Колмогорова?

5.4. Что такое предельная вероятность состояния?

5.5. Для какой цели используются формулы Эрланга?

***9. Приложение.***

Таблица 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | № варианта | | | | | | | | | |
| К задаче 1 |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| λ заявок/час | 90 | 90 | 85 | 70 | 75 | 80 | 65 | 60 | 75 | 80 | 90 |
| tоб мин | 2 | 1,5 | 2,5 | 2,0 | 2,5 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 2,5 | 2,0 | 1,5 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| К задаче 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| N | 90 | 85 | 90 | 90 | 90 | 80 | 80 | 80 | 80 | 70 | 90 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Расчет характеристик СМО с очередью**

***1. Цель работы:*** научиться выявлять и рассчитывать характеристики одноканальных систем массового обслуживания с очередью.

***2. Задание:***

**Занятия в лаборатории разрешается проводить только в присутствии преподавателя.**

2.1. Задача (одноканальная система с неограниченной очередью).

В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна λ (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет tоб суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем 2 судна.

2.2. Задача (одноканальная система с ограниченной очередью).

В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна λ (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет tоб суток. Предполагается, что очередь может быть ограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, если в порту могут ожидать разгрузки не более чем 2 судна.

***3. Порядок выполнения работы:***

3.1. Граф состояний одноканальной СМО с очередью показан на рис.1.:

λ λ λ λ λ

S0 S1 S2 … Sk Sn

μ μ μ μ μ

Рис.1.

Система может находиться в одном из состояний S0 , S1 ,..., Sk ,... по числу заявок, находящихся в СМО:

S0 - канал свободен;

S1 - канал занят (обслуживает заявку), очереди нет;

S2- канал занят, одна заявка стоит в очереди;

...

Sk - канал занят, (к-1) заявок стоят в очереди и т.д.

Характеристики системы находим по следующим формулам:

р0 = 1 - ρ

p1 = ρ ( 1 - ρ ) , p2 = ρ2 ( 1 - ρ ) , ... , pk = ρk ( 1 - ρ ) ,...

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ρ  L сист = -------;  1 - ρ | L оч = L сист - L об; | ρ2  L оч = ----;  1 - ρ | 1  Т сист = ---- L сист ;  λ |

Где L сист – среднее число заявок в системе, L оч - среднее число заявок в очереди, L об - среднее число заявок, находящихся под обслуживанием, Т сист -среднее время пребывания заявки в системе (очереди).

Пусть λ=0,4, tоб=2.

Пусть λ=0,25, tоб=2.

Тогда получим следующие характеристики:

Имеем ρ = λ / μ = λ t об = 0,4 \* 2 = 0,8 .

Имеем ρ = λ / μ = λ t об = 0,25 \* 2 = 0,5 .

Так как ρ = 0,8 < 1 **,** то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать, и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Так как ρ = 0,5 < 1 **,** то очередь на разгрузку не может бесконечно возрастать, и предельные вероятности существуют. Найдем их.

Вероятность того, что причал свободен: р0 = 1 - 0,8 = 0,2 **,**

а вероятность того, что он занят, - Рзан = 1 - 0,2 = 0,8 .

Вероятность того, что причал свободен: р0 = 1 - 0,5 = 0,5 **,**

а вероятность того, что он занят, - Рзан = 1 - 0,5 = 0,5 .

Вероятности того, что у причала находится 1,2,3 судна (т.е. ожидают разгрузки 0,1,2 судна) равны:

р1 = 0,8 \*(1 - 0,8 ) = 0,16 ;

р2 = 0,82 \* ( 1 - 0,8 ) = 0,128 ;

р3 = 0,83 \*( 1 - 0,8 ) = 0,1024 .

Вероятности того, что у причала находится 1,2,3 судна (т.е. ожидают разгрузки 0,1,2 судна) равны:

р1 = 0,5 \*(1 - 0,5 ) = 0,25 ;

р2 = 0,52 \* ( 1 - 0,5 ) = 0,625 ;

р3 = 0,53 \*( 1 - 0,5 ) = 0,015625 .

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна, равна

Р = р1 + р2 + р3 = 0,16 + 0,128 + 0,1024 = 0,3904.

Вероятность того, что ожидают разгрузку не более чем 2 судна, равна

Р = р1 + р2 + р3 = 0,25 + 0,625 + 0,015625 = 0,890625.

Среднее число судов, ожидающих разгрузки,

L оч = 0,82 / ( 1- 0,8 ) = 3,2,

а среднее время ожидания разгрузки: Т оч = 3,2 / 0,8 = 4 ( суток ).

Среднее число судов, ожидающих разгрузки,

L оч = 0,52 / ( 1- 0,5 ) = 0.5,

а среднее время ожидания разгрузки: Т оч = 0,5 / 0,5 = 1 ( суток ).

Среднее число судов, находящихся у причала,

L сист = 0,8 / (1 - 0,8) = 4 ( суток ) или L сист = 3,2 + 0,8 = 4 .

Среднее число судов, находящихся у причала,

L сист = 0,5 / (1 - 0,5) = 1 ( суток ) или L сист = 0,5 + 0,5 = 1 .

Среднее время пребывания судна у причала:

Т сист = 4 / 0,8 = 5 (суток).

Среднее время пребывания судна у причала:

Т сист = 1 / 0,5 = 2 (суток).

Очевидно, что эффективность разгрузки судов невысокая. Для её повышения необходимо уменьшить среднее время разгрузки судна tоб или увеличить число   
причалов n.

***4. Содержание отчета:***

Отчет должен содержать результаты выполнения п. 3.1., все расчеты и выводы.

***5. Контрольные вопросы:***

8.1. Назовите простейшие СМО и их параметры.

8.2. Приведите классификацию СМО.

8.3. Что позволяют рассчитать уравнения Колмогорова?

8.4. Что такое предельная вероятность состояния?

8.5. Для какой цели используются формулы Эрланга?

8.6. Какую систему характеризуют формулы Литта?

***6. Приложение.***

Таблица 1.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | **№ варианта** | | | | | | | | | |
| λ судов/сутки | 0,4 | 0,25 | 0,3 | 0,2 | 0,25 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,4 |
| tоб сут | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |

***Ответы на контрольные вопросы:***

8.1. Назовите простейшие СМО и их параметры.

Системы массового обслуживания – это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

Примерами систем массового обслуживания могут служить:

1. расчетно-кассовые узлы в банках, на предприятиях;
2. персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач;
3. станции технического обслуживания автомобилей; АЗС;
4. аудиторские фирмы;
5. отделы налоговых инспекций, занимающиеся приёмкой и проверкой текущей отчетности предприятий;
6. телефонные станции и т. д.

Система массового обслуживания включает следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающее устройство (обслуживающий аппарат, канал обслуживания), выходящий поток требований.

8.2. Приведите классификацию СМО.

Системы массового обслуживания классифицируют по разным признакам. К таким признакам относятся условия ожидания требования начала обслуживания. В соответствии с этим признаком системы подразделяются на следующие виды:

- системы массового обслуживания с потерями (отказами);

- системы массового обслуживания с ожиданием;

- системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди;

- системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.

8.3. Что позволяют рассчитать уравнения Колмогорова?

Предельные вероятности состояний.

8.4. Что такое предельная вероятность состояния?

Какое же поведение будет характерно для системы 9_html_m52614edd.gifпри 9_html_m4ffae915.gif? Возможно ли стремление функций 9_html_m16cb920b.gifк каким-то пределам? Такие пределы, если они все же существуют, принято называть предельными вероятностями состояний

8.5. Для какой цели используются формулы Эрланга?

Для нахождения характеристик предельного установившегося режима обслуживания.

8.6. Какую систему характеризуют формулы Литта?

СМО с ожиданием (очередью). Они позволяют определить среднее время пребывания заявки в очереди и в системе.